

02 미분가능성과 연속성

1. 미분계수와 도함수

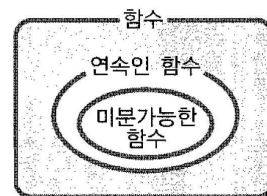
1 미분가능성과 연속성

(1) 미분가능의 정의

함수 $y=f(x)$ 에 대하여 $x=a$ 에서의 미분계수 $f'(a)$ 가 존재할 때,
 $y=f(x)$ 는 $x=a$ 에서 미분가능하다고 한다.

(2) 미분가능성과 연속성

함수 $y=f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하면 함수 $y=f(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이다.
 그러나 그 역은 성립하지 않는다.



개념 Plus

(2) 미분가능성과 연속성

① 미분가능하면 연속이다.

함수 $y=f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하면 미분계수

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

가 존재한다. 그런데 $x \rightarrow a$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 극한값 $f'(a)$ 가 존재하려면 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - f(a)\} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) - f(a) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이므로

함수 $y=f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하면 함수 $y=f(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이다.

② 연속이지만 미분가능하지 않을 수 있다.

함수 $f(x)=|x| = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$ 에서 (i) 연속성과 (ii) 미분가능성을 조사해 보자.

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ 이고, $f(0) = 0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

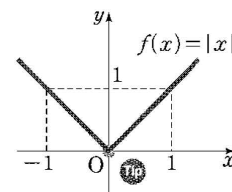
(ii) $x=0$ 에서의 우미분계수 $\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$

$x=0$ 에서의 좌미분계수 $\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = -1$

따라서 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$ 은 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에 의해 함수 $f(x)=|x|$ 는 $x=0$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않으므로

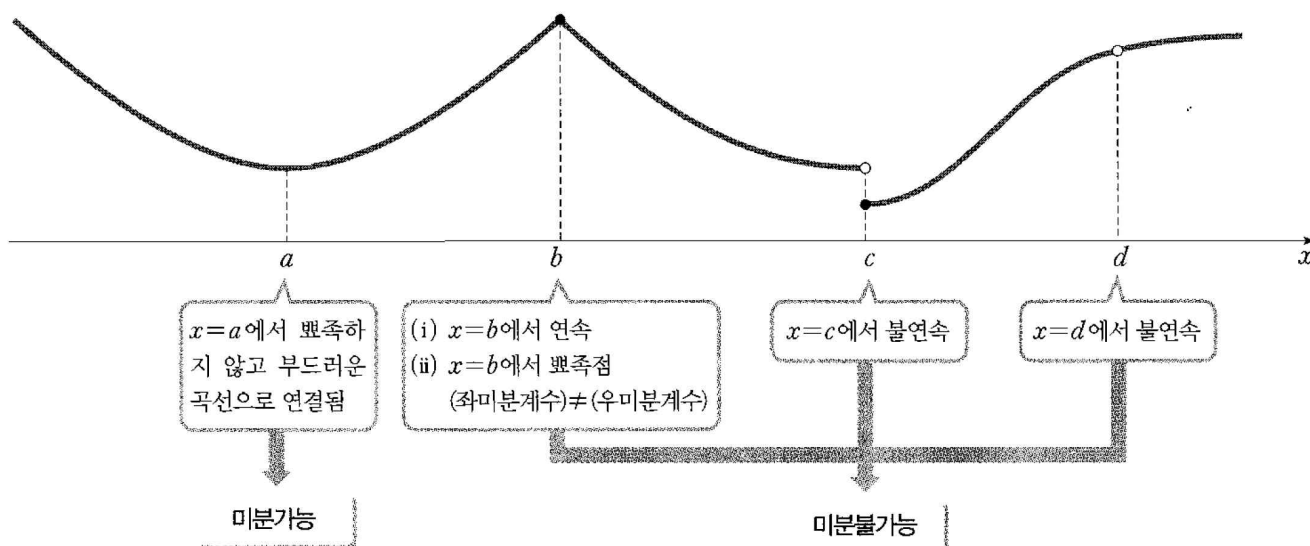
함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이라고 해서 반드시 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하다고 할 수 없다.



Tip 뾰족점(첨점)

함수 $f(x)=|x|$ 와 같이 $x=a$ 에서 연속이지만 $x=a$ 에서 곡선이 꺾이면 $x=a$ 에서 미분가능하지 않다. 이러한 점을 뾰족점 또는 첨점이라 한다.

※ 그래프의 모양으로 미분가능성 판별하기



필수예제 1

미분가능성과 연속성

함수 $f(x) = |x^2 - 1|$ 에 대하여 $x = 1$ 에서의 연속성과 미분가능성을 조사하여라.

유제

1 함수 $f(x) = x + |x|$ 에 대하여 $x = 0$ 에서의 연속성과 미분가능성을 조사하여라.

2 함수 $y = f(x)$ 가 $x = a$ 에서 미분가능하면 $y = f(x)$ 는 $x = a$ 에서 연속이다.'의 역이 성립하지 않음을 반례를 들어 증명하고자 한다. 다음 중 반례로서 적당한 함수는?

- ① $y = x^4$ ② $y = \frac{1}{2x}$ ③ $y = |x|$
 ④ $y = \begin{cases} x^3 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$ ⑤ $y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

3 다음은 「함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 미분가능하면 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 연속이다.」를 증명한 것이다.

<증명>

$y = f(x)$ 가 $x = a$ 에서 미분가능하면

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{가 존재한다.}$$

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - f(a)\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a)$$

$$= \boxed{(\text{가})} \cdot 0 = 0$$

$$\therefore \boxed{(\text{나})} = f(a)$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 연속이다.

위의 증명 과정 중 (가), (나)에 알맞은 것을 순서대로 나열한 것은?

- ① $f(a), \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ② $f(a), f(x)$
 ③ $f'(a), f(x)$ ④ $f'(a), \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
 ⑤ $f'(a), \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

4 다음 [보기]의 함수 중 $x = 2$ 에서 미분가능하지 않은 함수를 모두 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $f(x) = \sqrt{(x-2)^2}$
 ㄴ. $f(x) = (x-2)|x-2|$
 ㄷ. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{|x-2|}$

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

5 함수 $f(x)$ 가 다음과 같이 정의되었다.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & (|x| > 1) \\ ax(x^2 - b) & (|x| \leq 1) \end{cases}$$

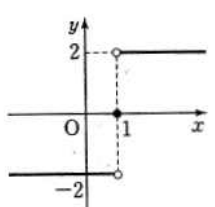
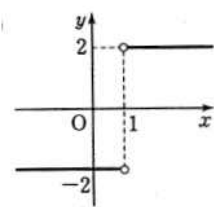
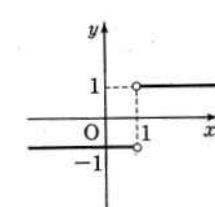
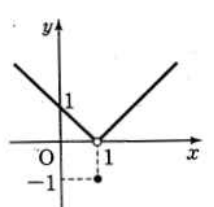
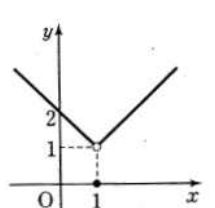
이 때, 함수 $f(x)$ 가 모든 실수에서 미분가능한 함수가 되도록 하는 상수 a, b 에 대하여 ab 의 값은?

- ① 3 ② 1 ③ 0
 ④ $-\frac{3}{2}$ ⑤ -2

6 함수 $F(x) = |x - 1|$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} \text{로 정의할 때, 다음 중 } y = g(x) \text{의}$$

그래프로 옳은 것은?

- ① 
- ② 
- ③ 
- ④ 
- ⑤ 

7 두 함수 $f(x)=|x|+1$, $g(x)=x^2f(x)$ 에 대하여 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

— < 보 기 > —

- ㉠. $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 모두 $x=0$ 에서 연속이다.
 ㉡. $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.
 ㉢. $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.

- ① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢
 ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

8 보기 중 연속함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하기 위한 충분조건인 것을 모두 고른 것은?

— < 보 기 > —

- ㉠. 극한값 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(-h)}{2h}$ 가 존재한다.
 ㉡. 극한값 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x^2)-f(0)}{x^2}$ 가 존재한다.
 ㉢. 극한값 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\tan x)-f(0)}{\tan x}$ 가 존재한다.

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢
 ④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

연습문제

1 함수 $f(x) = x|x|$ 의 그래프 위의 점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기를 구하여라.

2 함수 $f(x) = x^2 - 5x + 6$ 에 대하여

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+kh) - f(1)}{h} = -36$ 을 만족하는 실수 k 의 값을 구하시오.

3 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(1) = 2$, $f'(1) = 3$ 일 때,

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2) - x^2 f(1)}{x - 1}$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

4 함수 $f(x) = x^2 - 5x + 6$ 에 대하여

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+kh) - f(1)}{h} = -36$ 을 만족하는 실수 k 의 값을 구하시오.

5 함수 $f(x) = x^3 + 5x$ 에 대하여 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ 의 값을 구하시오.

6 두 함수 $f(x) = x + x^3 + x^5$, $g(x) = x^2 + x^4 + x^6$ 에 대하여

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - g(1-h)}{3h}$ 의 값은?

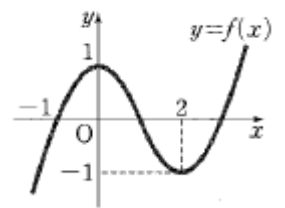
- ① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

7 다항함수 $f(x)$ 가 $f(1) = 1$, $f'(1) = 3$ 을 만족할 때,

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)} - 1}{x - 1}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

8 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같고 $(f \circ f)(x) = g(x)$ 라 할 때, 구간 $[-1, 2]$ 에서의 함수 $y = g(x)$ 의 평균변화율은?



- ① -1 ② $-\frac{2}{3}$
③ $-\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{3}$
⑤ $\frac{4}{3}$

9 함수 $f(x) = |x - 1|$ 에 대하여

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+23h) - f(1-11h)}{h}$ 의 값을 구하시오.

10 함수 $f(x) = x^3$ 에 대하여

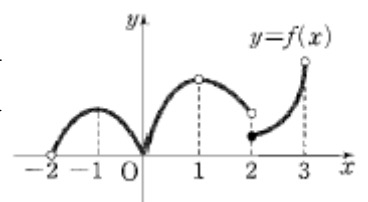
$P = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, $Q = \frac{f(b) - f(c)}{b - c}$, $R = f'(b)$ 라 할 때, P, Q, R 의

대소 관계는? (단, $a < b < c$)

- ① $P < Q < R$ ② $P < R < Q$ ③ $Q < P < R$
④ $R < P < Q$ ⑤ $R < Q < P$

11 $-2 < x < 3$ 에서 정의된 함수

$y = f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 함수 $f(x)$ 의 불연속인 점은 m 개, 미분가능하지 않은 점은 n 개다. 이 때, $m + n$ 의 값을 구하여라.



12 다음 보기의 함수 중 $x=0$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않은 것을 모두 고른 것은?

< 보기 >

$\neg. f(x) = |x|$

$\neg. f(x) = \begin{cases} |x| & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$

$\neg. f(x) = x|x|$

- ① $\neg$

② $\neg$

③ $\neg, \neg$
- ④ $\neg, \neg$

⑤ $\neg, \neg$

13 <보기>중 $x=0$ 에서 미분가능한 함수를 모두 고른 것은? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

< 보기 >

$\neg. f(x) = x\sqrt{|x|}$

$\neg. g(x) = x\cos x$

$\neg. h(x) = x^2[x]$

- ① $\neg$

② $\neg$

③ $\neg, \neg$
- ④ $\neg, \neg$

⑤ $\neg, \neg, \neg$

14 신형 바이러스성 독감의 백신 개발을 위해 비상 연구소에서는 밀폐 용기에 소량의 신형 바이러스를 배양하고 있다. x 시간 후의 독감 바이러스의 밀도를 나타내는 함수 $f(x)$ 는 미분가능하며 다음 두 조건을 만족한다. 이 때, 7시간 후의 바이러스의 밀도의 변화율 $f'(7)$ 의 값을 구하여라.

I. $f'(0) = 1$

II. $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y)$

15 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(1)=6$ 일 때, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x^3-1}$ 의 값은?

- ① 1

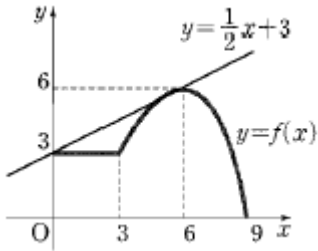
② 2

③ 3
- ④ 6

⑤ 8

16 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ f\left(a + \frac{b}{n}\right) - f\left(a - \frac{b}{n}\right) \right\}$ 를 $f'(a)$ 를 이용하여 나타내어라. (단, $b \neq 0$)

17 폐구간 $[0, 9]$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같다. 함수 $g(a, b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 로 정의할 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 골라라. (단, $0 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9$)



< 보기 >

$\neg. g(1, 5) > g(2, 5)$

$\neg. g(a, b) = \frac{1}{2}$ 인 순서쌍 (a, b) 를 무수히 많이 정할 수 있다.

$\neg. g(3, b)$ 는 $b=9$ 일 때, 최소값을 갖는다.

18 $x=a$ 에서 함수 $f(x)$ 의 미분계수는 2이다. 미분 가능한 함수 $g(x)$ 에 대하여 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h)-f(a)-g(h)}{h} = 0$ 이 성립할 때,

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h}$ 의 값은?

- ① 4

② 2

③ 0
- ④ -2

⑤ -4

19 자연수 a, b 에 대하여 함수 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ax^{n+b} + 2x - 1}{x^n + 1} (x > 0)$ 이 $x=1$ 에서 미분가능할 때, $a+10b$ 의 값을 구하시오.

20 함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 & (x < 2) \\ a(x-4)^2 + b & (x \geq 2) \end{cases}$ 가 $x=2$ 에서 미분가능할 때, $f(3)$ 의 값은?

- ① 4

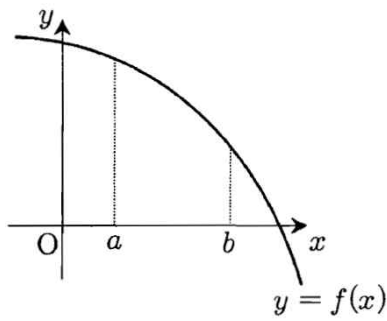
② 5

③ 6
- ④ 7

⑤ 8

21 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $f(1) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{f(x)\}^2 - 2f(x)}{1-x} = 10$ 을 만족시킬 때, $x=1$ 에서의 미분계수 $f'(1)$ 의 값을 구하시오.

22 다음 그림은 미분가능한 함수 $y=f(x)$ 의 그래프이다.



<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $0 < a < b$)

< 보 기 >

ㄱ. $\frac{f'(a)}{b} > \frac{f'(b)}{a}$

ㄴ. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < f'(b)$

ㄷ. $f'(\sqrt{ab}) > f'(\frac{a+b}{2})$

- ① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

23 함수 $f(x)=\begin{cases} x^3+ax & (x<1) \\ bx^2+1 & (x\geq 1) \end{cases}$ 가 $x=1$ 에서 미분가능할 때, $a+b$ 의 값은?

- ① 6 ② 7 ③ 8
 ④ 9 ⑤ 10

24 $f(1)=2, f'(1)=4$ 을 만족하는 함수 $f(x)$ 에 대하여

$g(x)=\begin{cases} xf(x) & (x\geq 1) \\ ax^2+b & (x<1) \end{cases}$ 가 $x=1$ 에서 미분가능할 때, a^2+b^2 의 값은?

- ① 5 ② 6 ③ 9
 ④ 10 ⑤ 13

25 함수 $f(x)=\begin{cases} ax^2+x & (x\leq 1) \\ -bx+1 & (x>1) \end{cases}$ 에 대하여 $f(x)$ 가

$x=1$ 에서 미분이 가능하도록 상수 a, b 를 정할 때, ab 의 값은?

- ① -1 ② 0 ③ 1
 ④ 2 ⑤ 4

26 다음 함수가 $x=a$ 에서 미분가능하도록 할 때, $a+b$ 의 값은?
 (단, $a>0$)

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & (x<a) \\ x^2+x+b & (x\geq a) \end{cases}$$

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

27 ‘함수 $y=f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하면 $y=f(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이다.’의 역이 성립하지 않음을 반례를 들어 증명하고자 한다. 다음 중 반례로서 적당한 함수는?

- ① $y=x^4$ ② $y=\frac{1}{2x}$ ③ $y=|x|$
 ④ $y=\begin{cases} x^3 & (x\geq 0) \\ 0 & (x<0) \end{cases}$ ⑤ $y=\frac{x^2-4}{x-2}$

28 다음 보기의 함수 중 $x=2$ 에서 미분가능하지 않은 함수를 모두 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $f(x)=\sqrt{(x-2)^2}$

ㄴ. $f(x)=(x-2)|x-2|$

ㄷ. $f(x)=\frac{x^2-4}{|x-2|}$

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

29 함수 $f(x)=\begin{cases} x^3+ax^2+bx & (x\geq 1) \\ 2x^2+1 & (x<1) \end{cases}$ 가 모든 실수

x 에서 미분 가능하도록 상수 a, b 를 정할 때, ab 의 값은?

- ① -5 ② -3 ③ -1
 ④ 0 ⑤ 1

30 <보기>의 함수 중 $x=0$ 에서 미분가능한 것을 모두 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $f(x)=\begin{cases} x & (x\geq 0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$

ㄴ. $g(x)=\begin{cases} (x+1)^2 & (x\geq 0) \\ 2x+1 & (x<0) \end{cases}$

ㄷ. $h(x)=\begin{cases} x^2+x+1 & (x\geq 0) \\ -x^2+x-1 & (x<0) \end{cases}$

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
 ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ



→ 미분계수 $f'(1)$ 이 존재하지 않음

→ 함수 $f(x) = |x^2 - 1|$ 은 $x = 1$ 에서 미분가능하지 않음

(i), (ii)에 의해

함수 $f(x) = |x^2 - 1|$ 는 $x = 1$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않다.



02. 미분가능성과 연속성

필수예제 & 유제

필수예제 1. 정답 $x = 1$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

$f(x) = |x^2 - 1|$ 을 $x^2 \geq 1$, $x^2 < 1$ 의 두 구간으로 나누어 절댓값 기호를 없애면

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & (x^2 \geq 1) \\ 1 - x^2 & (x^2 < 1) \end{cases}$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & (x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 1) \\ 1 - x^2 & (-1 < x < 1) \end{cases} \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $y = f(x)$ 가 $x = 1$ 에서 연속일 조건은

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

주어진 함수는 절댓값 기호를 포함한 함수이므로

①에 의해 $x = 1$ 에서의 우극한과 좌극한을 구하면

$$x = 1 \text{에서의 우극한} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (x^2 - 1) = 0$$

$$x = 1 \text{에서의 좌극한} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (1 - x^2) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} |x^2 - 1| = 0 \dots\dots \textcircled{2}$$

$$f(1) \text{의 값을 구하면 } f(1) = |1^2 - 1| = 0 \dots\dots \textcircled{3}$$

②, ③을 비교하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Rightarrow f(x) = |x^2 - 1| \text{은 } x = 1 \text{에서 연속}$$

(ii) $y = f(x)$ 가 $x = 1$ 에서 미분가능하기 위한 조건은

($x = 1$ 에서의 우미분계수) = ($x = 1$ 에서의 좌미분계수)

$x = 1$ 에서의 우미분계수를 구하면

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\{(1+h)^2 - 1\} - (1^2 - 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} (2 + h) = 2 \dots\dots \textcircled{4}$$

$x = 1$ 에서의 좌미분계수를 구하면

$$\lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{\{1 - (1+h)^2\} - (1^2 - 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow -0} \frac{-2h - h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} (-2 - h) = -2 \dots\dots \textcircled{5}$$

④, ⑤을 비교하면

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \neq \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

유제 1. 정답 $x = 0$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

$f(x) = x + |x|$ 를 $x \geq 0$, $x < 0$ 의 두 구간으로 나누면

$$f(x) = \begin{cases} 2x & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $x = 0$ 에서의 우극한을 구하면

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} 2x = 0$$

$x = 0$ 에서의 좌극한을 구하면

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} 0 = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \dots\dots \textcircled{2}$$

$$f(0) \text{의 값을 구하면 } f(0) = 0 \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{을 비교하면 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

따라서 함수 $f(x) = x + |x|$ 는 $x = 0$ 에서 연속이다.

(ii) $x = 0$ 에서의 우미분계수를 구하면

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{2h - 2 \cdot 0}{h} = 2 \dots\dots \textcircled{4}$$

$x = 0$ 에서의 좌미분계수를 구하면

$$\lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{0 - 2 \cdot 0}{h} = 0 \dots\dots \textcircled{5}$$

④, ⑤을 비교하면

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \neq \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

따라서 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$ 이 존재하지 않으므로

함수 $f(x) = x + |x|$ 는 $x = 0$ 에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에 의해

함수 $f(x) = x + |x|$ 는 $x = 0$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

유제 2. 정답 ③

$x = a$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수를 찾으려 한다.

① 모든 실수 x 에 대하여 미분가능하다.

② $x = 0$ 에서 $f(0)$ 가 존재하지 않으므로 불연속이다.

③ $x = 0$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

④ 모든 실수 x 에 대하여 미분가능하다.

⑤ $x = 2$ 에서 함수값 $f(2)$ 가 존재하지 않으므로 불연속이다.

따라서, 반례로 적당한 것은 ③이다.

유제 3. 정답 ④

$y = f(x)$ 가 $x = a$ 에서 미분가능하면

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{가 존재한다.}$$

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) \text{에서}$$

$$\boxed{(\text{c}) f'(a)} \quad \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - f(a)\} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a)$$

$$= \bullet \cdot 0 = 0$$

$$\therefore \boxed{(\text{c}) \lim_{x \rightarrow a} f(x)} = f(a)$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이다.

유제 4. 정답 ④

$$\neg. f(x) = |x-2| = \begin{cases} x-2 & (x \geq 2) \\ -x+2 & (x < 2) \end{cases}$$

$$\text{한편, } f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{x-2} \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x-2}{x-2} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} f'(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2-0} f'(x) \text{이므로 } f'(2) \text{의 값이 존재하지 않는다}$$

따라서, $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하지 않다.

$$\neg. f(x) = (x-2)|x-2| = \begin{cases} (x-2)^2 & (x \geq 2) \\ -(x-2)^2 & (x < 2) \end{cases}$$

$$\text{에서 } \lim_{x \rightarrow 2+0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} f'(x) = 0$$

$$\text{따라서, } f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0 \text{이므로}$$

$f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이다.

$$\text{한편, } f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)|x-2|}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} |x-2| = 0$$

따라서, $f'(2)$ 의 값이 존재하므로 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하다.

$$\neg. f(x) = \frac{x^2-4}{|x-2|} \text{는 } x=2 \text{에서 (분모)=0이므로}$$

$f(2)$ 의 값이 존재하지 않는다.

즉, $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 불연속이다.

따라서, $x=2$ 에서 미분가능하지 않다.

유제 5. 정답 ④

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (x < -1) \\ ax(x^2-b) & (-1 \leq x \leq 1) \\ 1 & (x > 1) \end{cases}$$

$$\therefore f'(x) = \begin{cases} 0 & (x < -1) \\ 3ax^2 - ab & (-1 < x < 1) \\ 0 & (x > 1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 $(-\infty, \infty)$ 에서 미분가능하려면 $x=-1$ 과 1 에서 연속이고 $x=-1$ 에서의 미분계수가 0 , $x=1$ 에서의 미분계수가 0 이어야 한다.

즉, $f(-1)=-1$, $f(1)=1$ 이어야 하므로

$$-a(1-b)=-1, \quad a(1-b)=1 \quad \cdots \textcircled{A}$$

$$\text{또한, } f'(-1)=0, \quad f'(1)=0$$

$$3a-ab=0 \quad \cdots \textcircled{B}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a=-\frac{1}{2}, \quad b=3$$

$$\therefore ab = -\frac{3}{2}$$

유제 6. 정답 ①

(i) $x=1$ 일 때,

$$f(1+h) - f(1-h) = |(1+h)-1| - |(1-h)-1|$$

$$= |h| - |-h|$$

$$= |h| - |h|$$

$$= 0$$

$$g(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h}$$

$$= 0$$

(ii) $x \neq 1$ 일 때,

$$g(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) + f(x) - f(x-h)}{h}$$

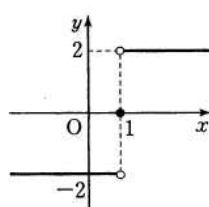
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{-h}$$

$$= 2f'(x)$$

$$x > 1 \text{이면 } f(x) = x-1 \text{ 이므로 } f'(x) = 1$$

$$x < 1 \text{ 이면 } f(x) = -x+1 \text{ 이므로 } f'(x) = -1$$

따라서 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



유제 7. 정답 ③

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0), \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 = g(0)$$

따라서 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 모두 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

$$\text{그런데 } \lim_{x \rightarrow +0} \frac{|x|}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -0} \frac{|x|}{x} = -1 \text{ 이므로 극한값이 존재하지 않는다}$$

다.

따라서 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x f(x) = 0$$

따라서 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.

이상에서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

유제 8. 정답 ③

$$\neg. [\text{반례}] f(x) = |x| \text{ 이면}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(-h)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| - |-h|}{2h} = 0$$

이므로 극한값은 존재하지만 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. [반례] $f(x) = |x|$ 이면

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x^2) - f(0)}{x^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x^2|}{x^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

이므로 극한값은 존재하지만 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

ㄷ. $x \rightarrow +0$ 이면 $\tan x \rightarrow +0$ 이고, $x \rightarrow -0$ 이면 $\tan x \rightarrow -0$ 이므로

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\tan x) - f(0)}{\tan x} = f'(0) \text{이 존재하면}$$

$f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.

이상에서 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하기 위한 충분조건인 것은 ㄷ이다.

연 습 문 제

1. 정답 2

함수 $f(x) = x|x|$ 의 그래프 위의 점 (1, 1)에서의 접선의 기울기는 $x=1$ 에서의 미분계수 $f'(1)$ 과 같으므로

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(1+\Delta x)|1+\Delta x| - 1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(1+\Delta x)^2 - 1}{\Delta x} \quad (\because 1+\Delta x > 0) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 + 2\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x + 2) = 2 \end{aligned}$$

따라서 점 (1, 1)에서의 접선의 기울기는 2이다.

2. 정답 12

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+kh) - f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+kh)^2 - 5(1+kh) + 6 - (1-5+6)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k^2h^2 - 3kh}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (k^2h - 3k) = -3k = -36 \\ \therefore k &= 12 \end{aligned}$$

3. 정답 ⑤

주어진 식의 분자에 $f(1)$ 을 빼고 더하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2) - x^2f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2) - f(1) + f(1) - x^2f(1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x^2) - f(1)}{x-1} - \frac{(x^2-1)f(1)}{x-1} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{(x+1)\{f(x^2) - f(1)\}}{(x+1)(x-1)} - \frac{(x-1)(x+1)f(1)}{x-1} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ (x+1) \cdot \frac{f(x^2) - f(1)}{x^2-1} - (x+1)f(1) \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2) - f(1)}{x^2-1} - \lim_{x \rightarrow 1} (x+1)f(1) \\ &= 2f'(1) - 2f(1) \\ &= 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 2 \quad (\because f'(1) = 3, f(1) = 2) \end{aligned}$$

4. 정답 12

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+kh) - f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+kh)^2 - 5(1+kh) + 6 - (1-5+6)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k^2h^2 - 3kh}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (k^2h - 3k) = -3k = -36 \\ \therefore k &= 12 \end{aligned}$$

5. 정답 17

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= f'(2) \\ f'(x) &= 3x^2 + 5 \\ \therefore f'(2) &= 17 \end{aligned}$$

6. 정답 ⑤

$$\begin{aligned} f'(1) &= 9, g'(1) = 12 \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - g(1-h)}{3h} &= \frac{2}{3}f'(1) + \frac{1}{3}g'(1) = 10 \end{aligned}$$

7. 정답 ⑤

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)} - 1}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{f(x)} - 1}{x-1} \times \frac{\sqrt{f(x)} + 1}{\sqrt{f(x)} + 1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x) - 1}{x-1} \times \frac{1}{\sqrt{f(x)} + 1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x-1} \times \frac{1}{\sqrt{f(x)} + 1} \right) \\ &= f'(1) \times \frac{1}{\sqrt{f(1)} + 1} = 3 \times \frac{1}{1+1} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

8. 정답 ③

구간 $[-1, 2]$ 에서 함수 $g(x)$ 의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{g(2) - g(-1)}{2 - (-1)} = \frac{g(2) - g(-1)}{3}$$

이 때, 주어진 그래프에서 $f(-1) = 0$, $f(0) = 1$, $f(2) = -1$ 이므로

$$g(2) = f(f(2)) = f(-1) = 0$$

$$g(-1) = f(f(-1)) = f(0) = 1$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{g(2) - g(-1)}{3} = \frac{0-1}{3} = -\frac{1}{3}$$

9. 정답 12

$$f(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1 & (x \geq 1) \\ 1-x & (x < 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$(\text{준식}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{23h-11h}{h} = 12$$

10. 정답 ②

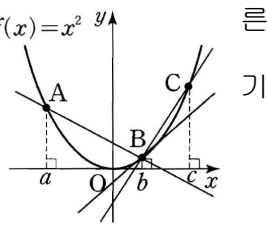
함수 $f(x) = x^2$ 에 대하여 $a < b < c$ 일 때, 오

쪽 그림에서 $P = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 는 직선 AB 의

기울기

$Q = \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$ 는 직선 CB 의 기울기

$R = f'(b)$ 는 점 B 에서의 접선의 기울기이므로 P, Q, R 의 대소 관계는 $P < Q < R$ 이다.



11. 정답 5

주어진 함수 $y = f(x)$ 의 그래프에서

(i) 불연속인 점

$x = 1$ 에서 함수값 $f(1)$ 이 존재하지 않고, $x = 2$ 에서의 극한값 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 가 존재하지 않으므로 $x = 1, x = 2$ 에서 함수 $y = f(x)$ 는 불연속이다.

$$\therefore m = 2$$

(ii) 미분가능하지 않은 점

$x = 0$ 에서 그래프의 모양이 뾰족하고, $x = 1, x = 2$ 에서는 불연속이므로 미분가능하지 않다.

$$\therefore n = 3$$

(i), (ii)에 의해 $m+n = 2+3 = 5$

12. 정답 ①

$\neg$. $f(x) = |x|$ 를 $x \geq 0, x < 0$ 의 두 구간으로 나누면

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases} \dots \textcircled{1}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} (-x) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$$

$$f(0) = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 연속이다.

(ii) $x = 0$ 에서의 우미분계수는

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{h}{h} (\because \textcircled{1}) = 1$$

$x = 0$ 에서의 좌미분계수는

$$\lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{-h}{h} (\because \textcircled{1}) = -1$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} \neq \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

따라서 $f'(0)$ 이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에 의해 함수 $f(x) = |x|$ 는 $x = 0$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않는다.

$\neg$. $f(x) = \frac{|x|}{x}$ 를 $x > 0, x < 0$ 의 두 구간으로 나누면

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = -1 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -0} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 불연속이다.

$\neg$. $f(x) = x|x|$ 를 $x \geq 0, x < 0$ 의 두 구간으로 나누면

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ -x^2 & (x < 0) \end{cases} \dots \textcircled{1}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} x^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} (-x^2) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x|x| = 0$$

$$f(0) = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 연속이다.

(ii) $x = 0$ 에서의 우미분계수는

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{h^2-0}{h} (\because \textcircled{1}) \\ &= \lim_{h \rightarrow +0} h = 0 \end{aligned}$$

$x = 0$ 에서의 좌미분계수는

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow -0} \frac{-h^2-0}{h} (\because \textcircled{1}) \\ &= \lim_{h \rightarrow -0} (-h) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

따라서 $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ 이 존재하므로 함수 $f(x)$ 는

$x = 0$ 에서 미분가능하다.

(i), (ii)에 의해 함수 $f(x) = |x|$ 는 $x = 0$ 에서 연속이고 미분가능하다.

따라서 보기 중 $x = 0$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않은 것은 $\neg$ 뿐이다.

13. 정답 ⑤

$$\neg. f(x) = x \sqrt{|x|}, f(0) = 0$$

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{f(0+a)-f(0)}{a} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a\sqrt{|a|}}{a} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \sqrt{|a|} = 0 \end{aligned}$$

따라서 $x = 0$ 에서 미분가능하다.

$$\neg. g(x) = x \cos x, g(0) = 0$$

$$g'(0) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{g(0+a)-g(0)}{a} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a \cos a}{a} = \lim_{a \rightarrow 0} \cos a = 1$$

따라서 $x = 0$ 에서 미분가능하다.

$$\subset. h(x) = x^2 [x], h(0) = 0$$

$$h'(0) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{h(0+a) - h(0)}{a} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a^2 [a]}{a} \\ = \lim_{a \rightarrow 0} a [a] = 0$$

따라서 $x=0$ 에서 미분가능하다.

따라서 $\neg$, $\subset$, $\subset$ 모두 $x=0$ 에서 미분가능하다.

14. 정답 50

II. $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y)$ 가 임의의 실수 x, y 에 대하여 성립하므로 양변에 $x=y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) + 0 \quad \therefore f(0) = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

미분계수의 정의에 의해 $f'(7)$ 은

$$f'(7) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(7+h) - f(7)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(7) + f(h) + 7h(7+h) - f(7)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) + 7h(7+h)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(h)}{h} + 7(7+h) \right\} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} (49 + 7h) (\because \textcircled{1}) \\ = f'(0) + 49 \\ = 1 + 49 = 50 (\because \text{I 에서 } f'(0) = 1)$$

15. 정답 ②

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \cdot \frac{1}{x^2 + x + 1} \\ f'(1) \cdot \frac{1}{3} = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2$$

16. 정답 $2bf'(a)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ f\left(a + \frac{b}{n}\right) - f\left(a - \frac{b}{n}\right) \right\} \text{에서 } \frac{b}{n} = h \text{로 놓으면 } n \rightarrow \infty \text{일 때,} \\ h \rightarrow 0 \text{이므로} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ f\left(a + \frac{b}{n}\right) - f\left(a - \frac{b}{n}\right) \right\} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b}{n} \{ f(a+h) - f(a-h) \} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b \{ f(a+h) - f(a) + f(a) - f(a-h) \}}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} b \left\{ \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{f(a-h) - f(a)}{h} \right\} \\ = b \left\{ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-h) - f(a)}{-h} \right\} \\ = b \{ f'(a) + f'(a) \} \\ = 2bf'(a)$$

17. 정답 $\subset, \subset$

$$g(a, b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{는 구간 } [a, b]$$

에서 함수 $f(x)$ 의 평균변화율이다. 이때, 평균변화율은 두 점을 이은 직선의 기울기를 의미하므로

$\neg$. $g(1, 5) \rightarrow$ 두 점 $(1, f(1)), (5, f(5))$ 를 이은 직선의 기울기

$g(2, 5) \rightarrow$ 두 점 $(2, f(2)), (5, f(5))$ 를 이은 직선의 기울기

오른쪽 그림에서 직선 ①의 기울기가 직선 ②의 기울기보다 크므로

$g(1, 5) < g(2, 5)$ ($\therefore$ 거짓)

$\subset$. $g(a, b) = \frac{1}{2}$ 은 두 점 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 를 이은 직선의 기울

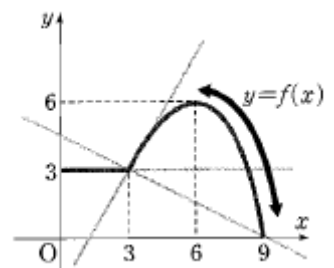
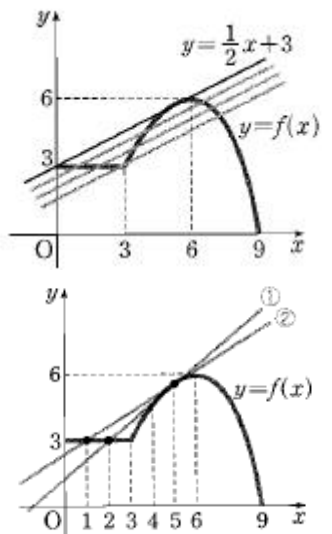
기가 $\frac{1}{2}$ 임을 의미하므로 다음 그림과 같이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프

위의 두 점을 이어 직선 $y = \frac{1}{2}x + 3$ 에 평행한 직선을 무수히 많을

그을 수 있다. 즉, 순서쌍 (a, b) 를 무수히 많이 정할 수 있다. ($\therefore$ 참)

$\subset$. $g(3, b)$ 는 두 점 $(3, f(3))$ 과 $(b, f(b))$ 를 이은 직선의 기울기를 의미한다. 따라서 오른쪽 그림과 같이 $b=9$ 일 때, 즉, 두 점 $(3, f(3)), (9, f(9))$ 를 이은 직선의 기울기가 최소이므로 $g(3, b)$ 는 $b=9$ 일 때, 최소값을 갖는다. ($\therefore$ 참)

따라서 보기 중 옳은 것은 $\subset, \subset$ 이다.



18. 정답 ①

$x=a$ 에서 함수 $f(x)$ 의 미분계수는 $f'(a)$ 이므로 $f'(a) = 2$ 이다.

$$(\text{준식}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a)}{2h} \cdot 2 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h}$$

$$= 2f'(a) - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} = 0$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} = 2f'(a) = 4$$

19. 정답 21

각 구간에서 $f(x)$ 를 구하면

(i) $0 < x < 1$: $f(x) = 2x - 1$

(ii) $x = 1$: $f(1) = \frac{a+1}{2}$

(iii) $x > 1$: $f(x) = ax^b$

$x=1$ 에서 미분 가능하므로

$$\text{a) 연속조건 : } \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = f(1)$$

$$\therefore a = 1$$

$$\text{b) 미분가능조건 : } f'(x) = \begin{cases} 2 & (x < 1) \\ abx^{b-1} & (x > 1) \end{cases}$$

$$\therefore 2 = ab$$

a)와 b)에서 $a = 1, b = 2$

$$\therefore a+10b=1+20=21$$

20. 정답: ④

$f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이므로 $4=4a+b$ 미분가능 하므로 미분계수 $f'(2)=4=-4a$ $a=-1$, $b=8$

21. 정답:5

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{f(x)\}^2 - 2f(x)}{1-x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)\{2-f(x)\}}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \{2-f(x)\} \\ &= f'(1)\{2-f(1)\} = 10 \\ \therefore f'(1) &= 5\end{aligned}$$

22. 정답 ④

ㄱ. $0 > f'(a) > f'(b)$ 이고, $0 < a < b$ 이므로,

$$\frac{f'(a)}{b} > \frac{f'(b)}{b} > \frac{f'(b)}{a} \quad (\text{참})$$

ㄴ. $((a, f(a)), (b, f(b)))$ 두 점을 지나는 직선의 기울기는 $x=b$ 에서 접선의 기울기보다 크다. (거짓)

ㄷ. $0 < a < b$ 에 대하여 $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ 이고, 개구간 (a, b) 에서 접선의 기울기는 점점 감소하므로

$$f'(\sqrt{ab}) > f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad (\text{참})$$

23. 정답 ①

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하면

(i) $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} (x^3+ax) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (bx^2+1)$$

$$1+a=b+1 \quad \therefore a-b=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $x=1$ 에서 미분계수 $f'(1)$ 이 존재하므로

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2+a & (x < 1) \\ 2bx & (x \geq 1) \end{cases} \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 1-0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f'(x) \text{이므로}$$

$$3+a=2b \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } a=3, b=3$$

$$\therefore a+b=6$$

24. 정답 ④

$x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} (ax^2+b) = \lim_{x \rightarrow 1+0} xf(x)$$

$$a+b=1 \cdot f(1) \quad \therefore a+b=2 \quad \dots \textcircled{1}$$

또한, $x=1$ 에서 미분계수 $f'(1)$ 이 존재하므로

$$g'(x) = \begin{cases} f(x)+x \cdot f'(x) & (x \geq 1) \\ 2ax & (x < 1) \end{cases} \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} g'(x)$$

$$2a=f(1)+1 \cdot f'(1), \quad 2a=6 \quad \therefore a=3$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } b=-1$$

$$\therefore a^2+b^2=3^2+(-1)^2=10$$

25. 정답 ①

$$x=1 \text{에서 연속이어야 하므로 } \lim_{x \rightarrow 1-0} (ax^2+x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (-bx+1)$$

$$a+1=-b+1 \quad \therefore a+b=0 \quad \dots \textcircled{1}$$

또한, $x=1$ 에서의 미분계수가 존재해야 하므로

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax+1 & (x \leq 1) \\ -b & (x > 1) \end{cases} \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f'(x), \quad 2a+1=-b$$

$$\therefore 2a+b=-1 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a=-1, b=1$$

$$\therefore ab=-1$$

26. 정답 ②

$$x=a \text{에서 연속이어야 하므로 } \lim_{x \rightarrow a+0} (x^2+x+b) = \lim_{x \rightarrow a-0} x^3$$

$$a^2+a+b=a^3 \quad \dots \textcircled{1}$$

또한, $f'(a)$ 가 존재해야 하므로

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & (x < a) \\ 2x+1 & (x \geq a) \end{cases} \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f'(x) \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\text{즉, } 3a^2=2a+1$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } 3a^2-2a-1=0, (3a+1)(a-1)=0$$

$$a > 0 \text{이므로 } a=1$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } b=-1$$

$$\therefore a+b=0$$

27. 정답 ③

$x=a$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수를 찾으려 한다.

① 모든 실수 x 에 대하여 미분가능하다.

② $x=0$ 에서 $f(0)$ 가 존재하지 않으므로 $x=0$ 에서 불연속이다.

③ $x=0$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

④ 모든 실수 x 에 대하여 미분가능하다.

⑤ $x=2$ 에서 함수값 $f(2)$ 가 존재하지 않으므로 $x=2$ 에서 불연속이다. 따라서, 반례로 적당한 것은 ③이다.

28. 정답 ④

$$\neg. f(x) = |x-2| = \begin{cases} x-2 & (x \geq 2) \\ -x+2 & (x < 2) \end{cases}$$

$$\text{한편, } f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{x-2} \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x-2}{x-2} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f'(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2+0} f'(x) \text{이므로}$$

$f'(2)$ 의 값이 존재하지 않는다.

따라서, $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하지 않다.

$$\hookrightarrow f(x) = (x-2)|x-2| = \begin{cases} (x-2)^2 & (x \geq 2) \\ -(x-2)^2 & (x < 2) \end{cases}$$

$$\text{에서 } \lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = 0$$

따라서 $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned} \text{한편, } f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)|x-2|}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} |x-2| = 0 \end{aligned}$$

따라서, $f'(2)$ 의 값이 존재하므로 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하다.

$\hookrightarrow f(x) = \frac{x^2 - 4}{|x - 2|}$ 는 $x=2$ 에서 (분모)=0이므로 $f(2)$ 의 값이 존재하지 않는다.

즉, $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 불연속이다.

따라서, $x=2$ 에서 미분가능하지 않다.

이상에서 $x=2$ 에서 미분 불가능한 함수는 $\neg$, $\hookrightarrow$ 이다.

29. 정답: ②

함수 $f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + bx & (x \geq 1) \\ 2x^2 + 1 & (x < 1) \end{cases}$ 이 모든 실수 x 에서 미분가능하려면

면 $x=1$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = f(1)$$

$$\text{즉, } 2 + 1 = 1 + a + b$$

$$\therefore a + b = 2 \quad \text{㉠}$$

$x=1$ 에서 미분계수가 존재해야 하므로

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2ax + b & (x > 1) \\ 4x & (x < 1) \end{cases} \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f'(x) \text{이어야 한다.}$$

$$\text{즉, } 3 + 2a + b = 4$$

$$\therefore 2a + b = 1 \quad \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = -1, \quad b = 3$$

$$\therefore ab = -3$$

30. 정답: ②

$$\neg. \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 1,$$

$$\lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = -1$$

이므로 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

$\hookrightarrow g(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이고,

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = 2$$

이므로 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.

$\hookrightarrow h(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이므로 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.