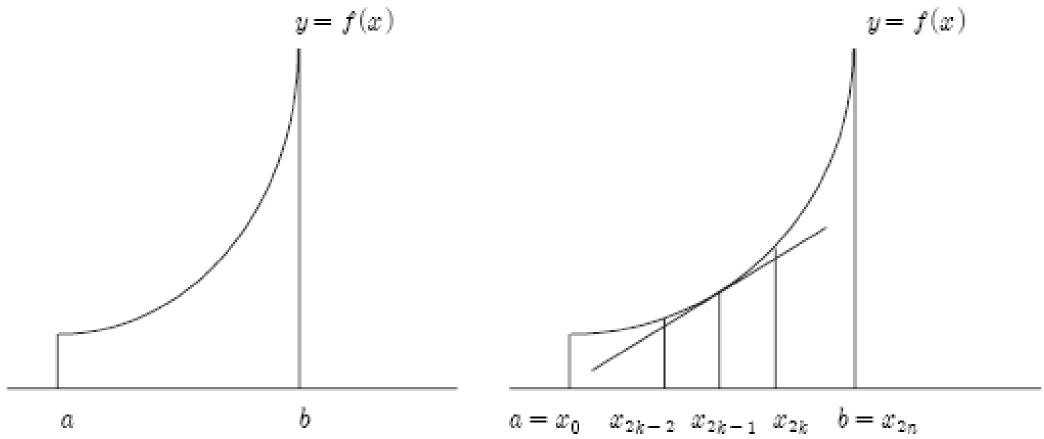
8 연세대학교 모의 문항 (1)

제 시 문

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 폐구간 $[a,b]$에서 연속이고, $y=f(x)$의 그래프가 [그림 1]과 같을 때, 다음 물음에 답하시오.



[그림 1] [그림 2]

[논제 1-1] 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$부터 점 $(b, f(b))$까지의 곡선의 길이를 정적분의 정의를 이용하여 구하시오. **(10점)**

[논제 1-2] [그림 2]는 [그림 1]의 폐구간 $[a,b]$를 $2n$개의 균등한 소구간으로 나눈 그래프이다. 이때, 점 $(x_{2k-1}, f(x_{2k-1}))$에서의 접선의 식을 $y=g_k(x)$라 하자. 접선 위의 점 $(x_{2k-2}, g_k(x_{2k-2}))$ 와 점 $(x_{2k}, g_k(x_{2k}))$ 사이의 거리를 l_k라고 할 때 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} l_k$ 의 값을 구하시오. **(20점)**

[논제 1-3] 위의 [논제 1-1]과 [논제 1-2]의 결과를 비교 분석하고, [논제 1-1]과 같은 결론을 유도할 수 있는 다른 방법에 대하여 논하시오. **(10점)**

제시문 분석

① 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 폐구간 $[a,b]$에서 연속이라는 조건과 함께 [그림 1]에서 그 그래프를 제시하고 있다. 따라서 함수 $f(x)$가 주어진 구간에서 연속이며 미분가능임을 알 수 있다. 이는 주어진 구간의 임의의 점에서 접선을 그을 수 있다는 조건이 되므로 [논제 1-2]의 해결을 위한 바탕이 됨과 동시에 중간값의 정리나 평균값의 정리를 응용할 수 있는 근거가 된다.

② [그림 2]에서는 [논제 1-2]의 이해를 위하여 주어진 구간을 $2n$등분하여 n등분한 각 구간의 중점에서의 접선을 보여주고 있다.

논제 분석

① 정적분의 정의를 이용하여 곡선의 길이를 구할 수 있는가?

주어진 구간을 n등분하여 각 구간의 선분의 길이의 총합의 극한값으로 곡선의 길이를 구하면 된다. 평균값의 정리와 정적분의 정의에 대한 정확한 이해가 필요하다.

② 균등하게 분할한 각 구간에서의 접선의 길이의 합의 극한을 구할 수 있는가?

주어진 구간을 $2n$개의 소구간으로 나누어 홀수 번째 경계에서의 접선을 이용하도록 요구하는 이 방법은 결국 n등분한 구간의 중점에서의 접선의 방정식을 이용하여 선분의 길이를 구하고, 그 총합의 극한값으로 곡선의 길이를 구하게 된다. 이는 [논제 1-1]에서 사용한 방법을 적용하면서 새로운 길이의 합을 활용하도록 요구하는 것이다.

③ 서로 다른 방법으로 구한 결과를 비교할 수 있는가? 또 같은 결과를 얻을 수 있는 또 다른 방법을 제시할 수 있는가?

[논제 1-1]과 [논제 1-2]의 결과는 같아야 한다. 비록 다른 선분의 길이의 합을 이용하여 곡선의 길이를 구하였지만 극한을 이용하여 정적분의 정의대로 나타냈기 때문에 결과가 같다는 설명을 할 수 있어야 한다. 또한 이 두 가지와 다른 방법을 제시하라는 질문은 두 방법을 혼합하는 방법 등 여러 가지 대안이 있을 수 있다.

배경지식 쌓기

① 곡선의 길이

함수 $f(x)$가 폐구간 $[a, b]$를 포함하는 개구간에서 미분가능하고 $f'(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서 점 $(b, f(b))$까지의 곡선의 길이 L은

$$L=\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

이다.

② 정적분의 정의

함수 $y=f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(x)\geq 0$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구분구적법으로 구하여 보자.

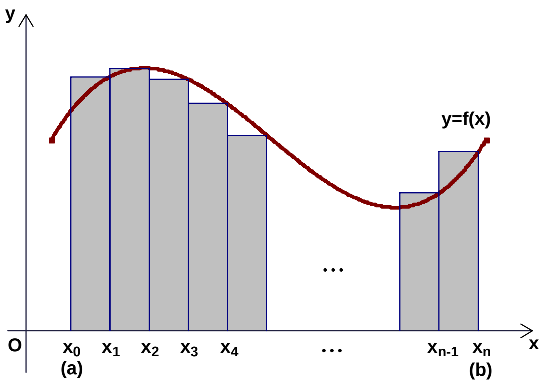
구간 $[a, b]$를 n등분하여 양 끝점과 각 분점을 차례로

$$x_0(=a),\ x_1,\ x_2,\ \cdots, x_{n-1},\ x_n(=b)$$

이라 하고, 각 소구간의 길이를 Δx라고 하면

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}$$

이다.



이 때, 위 그림과 같이 각 소구간의 오른쪽 끝에서의 함숫값을 높이로 하는 직사각형의 넓이의 합은 S_n이라 하면

$$S_n=f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+\cdots+f(x_n)\Delta x=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

이다.

여기서, $n\to\infty$이면 S_n은 구하는 도형의 넓이 S에 한없이 가까워진다.

$$\therefore S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

일반적으로, 함수 $y=f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이면

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$$

가 항상 존재한다. 이 때, 이 극한값을 함수 $f(x)$의 a에서 b까지의 정적분이라 하고, 기호로

$$\int_a^b f(x)dx$$

와 같이 나타낸다.

그리고 $\int_a^b f(x)dx$의 값을 구하는 것을 함수 $f(x)$를 a에서 b까지 적분한다고 하고, a를 이 정적분의 아래끝, b를 위끝이라 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$$

(단, $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$, $x_k=a+k\Delta x$)

③ **평균값의 정리**

함수 $f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이고, 개구간 (a, b)에서 미분가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\ \ (a<c<b)$$

인 c가 적어도 하나 존재한다.

풀어 보기

1. 정적분의 정의에 의하여 $\int_0^2 x^2dx$의 값을 구하시오.

2. 정적분의 정의를 이용하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)$을 구하시오.

3. $y=x^{\frac{3}{2}}$의 폐구간 $[0, 4]$에서의 곡선의 길이를 구하시오.

[개요 짜기]

[답안 작성]

읽기 자료

➡ 리만합을 이용한 정적분의 정의

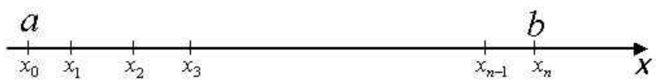
함수 f가 폐구간 $[a, b]$에서 정의되었다고 하자. 구간 $[a, b]$의 양 끝점 a와 b 사이에 있는 임의의 $n-1$개의 점 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$을

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b$$

가 되도록 잡으면, $n+1$개의 점 $x_0 = a, x_1, x_2, \cdots, x_n = b$는 구간 $[a, b]$를 n개의 소구간 $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$으로 나눈다. 이들 n개의 소구간의 점들의 집합

$$P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$$

을 $[a, b]$의 분할(partition)이라 하고, $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$을 P의 분할점이라 한다.



분할 P의 각 k번째 소구간 $[x_{k-1}, x_k]$의 길이를 $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$로 표시한다. 이 $\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n$들 중에서 가장 큰 길이의 값을 P의 노름(norm)이라 하고 $\| P \|$로 나타낸다. 즉,

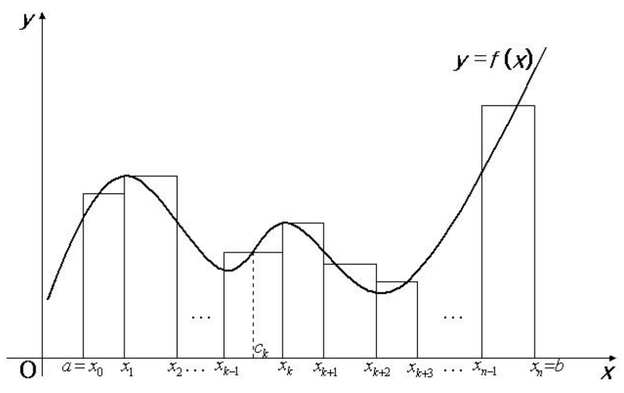
$$\| P \| = \max\{\Delta x_0, \Delta x_1, \cdots, \Delta x_n\}$$

특히 각 소구간의 길이 Δx_k가 모두 같으면 분할 P를 정칙분할이라 한다. 이 때 $\| P \|$는 $\dfrac{b-a}{n}$가 된다.

분할 P의 각 소구간 $[x_{k-1}, x_k]$ 내에서 임의의 점 c_k를 택하여 만든 합

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k) \Delta x_k$$

를 함수 f의 분할 P에 대한 리만합(Riemann sum)이라고 부른다.



리만합은 주어진 함수 f에 대하여 구간 $[a, b]$의 분할방법과 점 c_k들의 선택 방법에 따라 달라짐을 알 수 있다.

함수 f가 폐구간 $[a, b]$에서 정의되었다고 하자. 리만합에서 $\| P \|$가 0에 가까이 갈 때, 극한값

$$\lim_{\| P \| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \Delta x_k$$

가 존재하면, 이 극한값을 함수 f 의 $x=a$에서 $x=b$까지의 정적분(definite integral) 또는 리만적분이라 하며

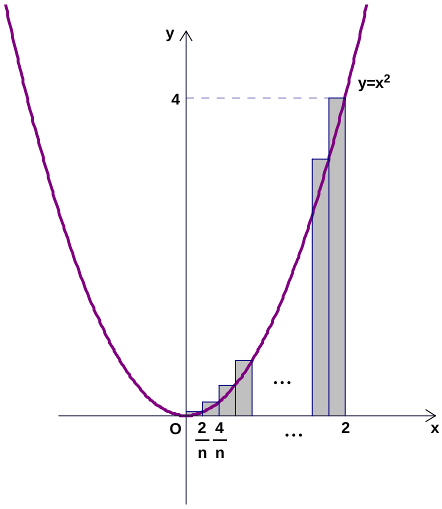
$$\int_a^b f(x)dx$$

로 표시하고, 이 때 f는 $[a, b]$에서 적분가능(integrable)하다고 말한다. 또한, 정적분 $\int_a^b f(x)dx$에서 $f(x)$를 피적분함수, a를 정적분의 아래끝, b를 정적분의 위끝이라 한다.

주어진 함수 f가 $[a, b]$에서 적분가능하면, $[a, b]$의 분할 P의 노름 $\| P \|$가 한없이 0에 가까워지도록 한 분할 P의 각 소구간 $[x_{k-1}, x_k]$에서 점 c_k를 어떻게 택하든 f의 P에 대한 리만합은 항상 일정한 값에 수렴함이 알려져 있다.

예시 답안

[풀어 보기 1]



정적분의 정의에서 $a=0,\ b=2$이므로 $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}=\dfrac{2}{n},\ x_k=a+k\Delta x=\dfrac{2k}{n}$이다.

또, $f(x_k)={x_k}^2=\left(\dfrac{2k}{n}\right)^2=\dfrac{4k^2}{n^2}$이다.

따라서 $\displaystyle\int_0^2 x^2dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{4k^2}{n}\cdot\frac{2}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{8}{3}$$

[풀어 보기 2]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\right)^2\frac{1}{n}$$

$\Delta x=\dfrac{1-0}{n},\ x_k=0+k\cdot\dfrac{1}{n}$이라 하면, 정적분에 정의에 의하여

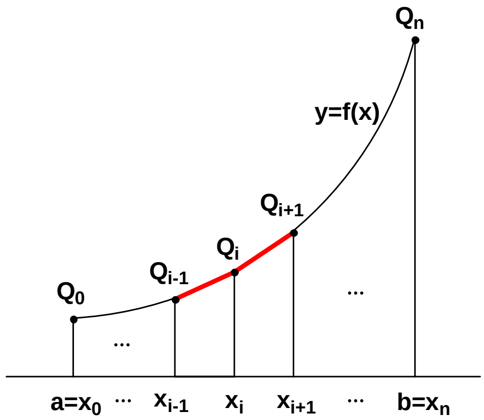
(준식)= $\displaystyle\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$

[풀어 보기 3]

$y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$이므로 곡선의 길이 l은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$l=\int_0^4\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx=\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\left[\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{4}{9}\right]_0^4=\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$$

[논제 1-1]



구간 $[a,b]$를 n등분하여 그 분점을 각각 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ 라 하고, 그 점에 대응되는 곡선 $y=f(x)$위의 점을 각각 $Q_0, Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ 이라 하자.

$$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}\ \ (i=1,2,\cdots,n)\ \ (\Delta x_i=\frac{b-a}{n})$$

$$Q_i=(x_i, f(x_i))\qquad (i=0,1,2,\cdots,n)$$

라 하면

$$\overline{Q_{i-1}Q_i}=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}=\sqrt{(\Delta x_i)^2+(\Delta y_i)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i$$

이다. 그런데 여기서 $f(x)$가 $[a,b]$에서 연속이고 미분가능한 함수이므로 평균값 정리에 의하여

$$f'(z_i)=\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}=\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}$$

을 만족하는 $z_i\in(x_{i-1}, x_i)$가 존재한다. 따라서 위 선분의 길이는

$$\overline{Q_{i-1}Q_i}=\sqrt{1+\{f'(z_i)\}^2}\,\Delta x_i$$

가 되고 각 구간에서 구한 이러한 선분의 총합은

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{Q_{i-1}Q_i}=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\{f'(z_i)\}^2}\,\Delta x_i.$$

이 된다.

여기서 $f'(x)$가 폐구간 $[a,b]$에서 연속이므로 $n\to\infty$이면 $f'(z_i)\to f'(x_i)$이다.

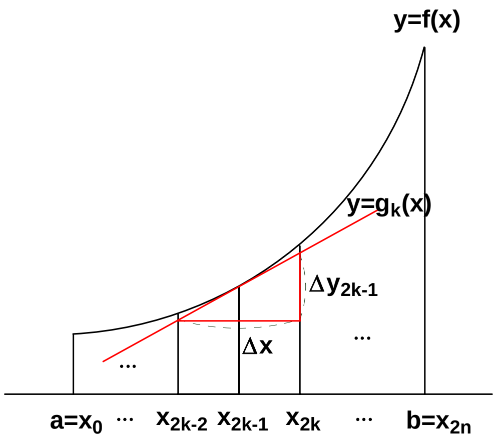
따라서 구하는 곡선의 길이는 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\overline{Q_{i-1}Q_i}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\{f'(x_i)\}^2}\,\Delta x_i$ ($\Delta x_i=\dfrac{b-a}{n}$, $x_i=a+i\Delta x_i$)이다.

정적분의 정의에 의하여 이는

$$\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

와 같다.

[논제 1-2]



폐구간 $[a,b]$를 $2n$등분하여 각 소구간을 위 그림과 같이 $\Delta x=x_{2k}-x_{2k-2}$ 라 하고, 이 때 점$(x_{2k-1}, f(x_{2k-1}))$에서의 접선 $y=g_k(x)$ 에서의 Δx에 대한 y증분을 Δy_{2k-1}이라 하면 이 접선의 기울기가 $f'(x_{2k-1})$이므로 $\Delta y_{2k-1}=f'(x_{2k-1})\Delta x$ 이다. 따라서 점 $(x_{2k-2}, g_k(x_{2k-2}))$ 와 점 $(x_{2k}, g_k(x_{2k}))$사이의 거리 l_k는

$$l_k=\sqrt{(\Delta x)^2+\{f'(x_{2k-1})\Delta x\}^2}=\sqrt{1+\{f'(x_{2k-1})\}^2}\,\Delta x \text{ 이다.}$$

따라서 구하는 곡선의 길이는

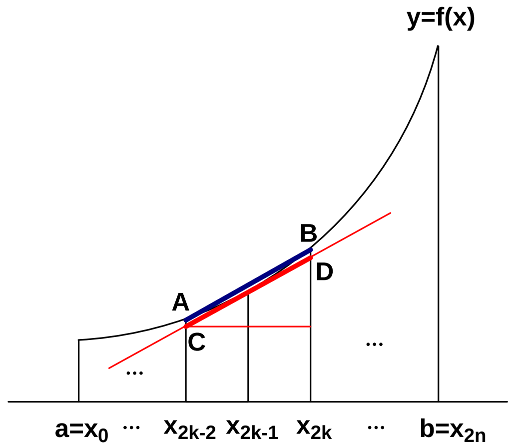
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}l_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\{f'(x_{2k-1})\}^2}\,\Delta x\ \left(\Delta x=\frac{b-a}{n}\right)$$

이고, 정적분의 정의에 의하여 이는

$$\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

와 같다.

[논제 1-3]



[논제 1-1]은 위 그림의 선분AB의 길이 L_k의 합의 극한으로 곡선의 길이를 구한 것이고, [논제 1-2]는 선분CD의 길이 l_k의 합의 극한으로 곡선의 길이를 구한 것이다. 앞에서 유도한 바와 같이 이는 결국 같은 값을 갖게 된다. 함수 $f(x)$가 구간 $[x_{2k-2}, x_{2k}]$에서 연속이고 미분가능이므로 평균값정리에 의해서

$$\frac{f(x_{2k})-f(x_{2k-2})}{x_{2k}-x_{2k-2}}=f'(x_i)$$

를 만족하는 $x_i \in (x_{2k-2}, x_{2k})$가 존재한다. 이 x_i의 값이 항상 x_{2k-1}의 값과 일치하는 것은 아니나, $n \to \infty$이면 $\Delta x = x_{2k}-x_{2k-2} \to 0$ 이므로 $L_k \approx l_k$ 가 되고 [논제 1-1]과 [논제 1-2]는 같은 결과가 나오게 되는 것이다.

이와 같이 곡선의 길이는 정적분의 정의를 이용하여 유한 선분의 길이의 합의 극한으로 계산할 수 있는데, 이 때 사용하는 유한선분의 길이를 여러 가지 다른 방식으로 정의하여도 위와 같은 방법으로 계산하여 동일한 값의 곡선의 길이를 얻을 수 있다.

예를 들어 다음의 각 경우가 있을 수 있다.

첫째, 폐구간 $[a, b]$를 $2rn(r \geq 2,\ r$은 자연수$)$개의 균등한 소구간으로 나누어 [논제 1-2]와 같이 접선의 길이를 이용하는 방법.

둘째, 폐구간 $[a, b]$를 $rn(r \geq 2,\ r$은 자연수$)$개의 균등한 소구간으로 나누어 [논제 1-1]과 같이 선분의 길이를 이용하는 방법.

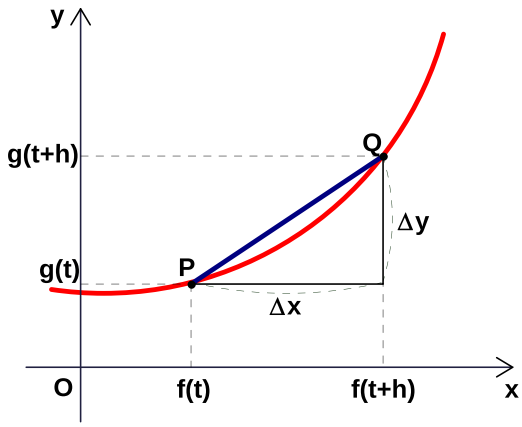
셋째, 폐구간 $[a, b]$를 $2n$개의 균등한 소구간으로 나누고 각 구간에서의 접선의 길이를 이용하는 방법.

넷째, 벡터를 이용하는 방법.

벡터를 이용하는 방법을 자세히 설명하면 다음과 같다.

평면에서 움직이는 물체의 위치는 시간의 함수로 표현이 가능하고, 2차원 평면에서 위치는 $(x,y)=(f(t),\ g(t))$ 같이 표현이 가능하다. 이 때, 시간에 대한 위치(거리)의 변화율이 물체의 속도이고, 시간에 관한 속도의 변화율이 가속도가 된다.

평면에서 움직이는 점 P의 좌표가 시간 t에 관한 매개변수 $(x,y)=(f(t),\ g(t))$로 나타내어진다고 하고, 길이 h인 시간 구간에서 점 P가 점 Q로 움직였다고 하자.



이 때, 점P에서 점Q 로의 위치 변화는

$$\triangle x=f(t+h)-f(t)$$
$$\triangle y=g(t+h)-g(t)$$

여기서 $\lim_{\triangle t\to 0}\frac{\triangle x}{\triangle t}=\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}=f'(t)$와 $\lim_{\triangle t\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle t}=\lim_{h\to 0}\frac{g(t+h)-g(t)}{h}=g'(t)$는 각각 점$P$의 시각 t에서의 x,y축 방향의 순간변화율이고 이것은 시간에 대한 거리의 변화율이므로 점P의 $x,\ y$축 방향의 속도를 나타내는 성분이다. 따라서 점P의 속도벡터를 $\vec{v}$라 하면

$$\vec{v}=(f'(t),\ g'(t))=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$$

가 된다.

이 때, 속도를 적분함으로서 물체의 일정 시간 후의 위치를 구할 수 있다. 특히 속도 $\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$에 대해 속력은 $|\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ 이므로 점P가 시간 $t=a$에서 $t=b$까지 실제로 움직인 총거리는 $S=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$로 구할 수 있다. 이 실제로 움직인 거리가 곡선의 길이가 되고 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\therefore\ S=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)^2}\,dx=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

이 역시 앞에서 유도했던 것과 같은 결과를 나타낸다.