

수리 영역 (가형)

시간 : 100 분

점수 : 100 점



종로학평

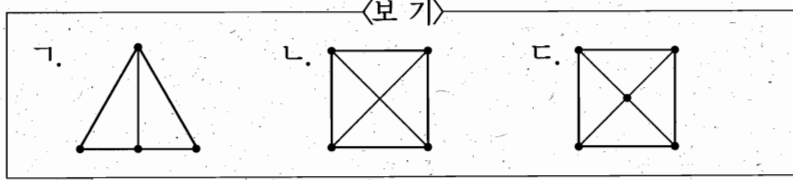
1. 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ 에 대하여 행렬 $AB+B$ 의 모든 성분의 합은? [2점]
- ① 14 ② 16 ③ 18
④ 20 ⑤ 22

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$ 의 값은? (단, e 는 자연로그의 밑이다.) [2점]
- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + 3^{10}}{3^n}$ 의 값은? [2점]
- ① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1
④ 3 ⑤ 9

4. 무리방정식 $\sqrt{x} + \sqrt{9-x} = 3$ 의 모든 실근의 합은? [3점]
- ① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

5. 오른쪽 그래프와 같은 그래프인 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]



- ① 가 ② 나 ③ 다
 ④ 가, 다 ⑤ 나, 다

6. 함수 $f(x) = 4^x - 2^{x+2} - 1$ 의 최솟값은? [3점]

- ① -5 ② -4 ③ -3
 ④ -2 ⑤ -1

7. $0 < A < \frac{\pi}{2}$, $0 < B < \frac{\pi}{2}$ 이고, $\cos(A-B) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan A = 2$ 일 때, $6\sin B + 3\cos B$ 의 값은? [3점]

- ① $3\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{10}$
 ④ $3\sqrt{5}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

8. $0 < x < \pi$ 일 때, $\cos^2 x = \frac{1 + \sin \frac{5}{18}\pi}{2}$ 를 만족시키는 두 실수 α, β ($\alpha < \beta$)에 대하여 $\beta - \alpha$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{4}{9}\pi$ ② $\frac{5}{9}\pi$ ③ $\frac{2}{3}\pi$
 ④ $\frac{7}{9}\pi$ ⑤ $\frac{8}{9}\pi$

9. $0 \leq x \leq 2$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \sin \pi x + 2 \sin \frac{\pi}{2} x$ 가 있다. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = c$ 가 한 점에서 만날 때, 상수 c 의 값은?

[4점]

- ① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
 ④ 3 ⑤ $2\sqrt{3}$

10. 함수 $f(x) = \frac{x-1}{|x|}$ 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[3점]

<보 기>

- ㄱ. $f(2012) < 1$
 ㄴ. $x \neq 0$ 이면 $f'(-x) = -f'(x)$ 이다.
 ㄷ. 함수 $f(x)$ 는 극값을 갖는다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11. [표 1]은 두 가게 P, Q에서 팔고 있는 사과와 배의 1개당 가격을 나타낸 것이고, [표 2]는 수민이와 지영이가 사려고 하는 사과와 배의 개수를 나타낸 것이고, [표 3]은 수민이와 지영이가 가게 P에서 사과와 배를 구입할 때 지불해야 하는 금액과 가게 Q에서 사과와 배를 구입할 때 지불해야 하는 금액을 나타낸 것이다.

(단위 : 원)			(단위 : 개)			(단위 : 원)		
	사과	배		수민	지영		수민	지영
P	1200	2000	사과	a	b	P	7600	10400
Q	1000	2500	배	c	d	Q	8000	12000

[표 1]

[표 2]

[표 3]

위의 [표 1], [표 2], [표 3]을 나타내는 각각의 행렬 $\begin{pmatrix} 1200 & 2000 \\ 1000 & 2500 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7600 & 10400 \\ 8000 & 12000 \end{pmatrix}$ 에 대하여 다음 등식이 성립한다고 한다.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{100} \begin{pmatrix} p & -20 \\ -10 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 76 & 104 \\ 80 & 120 \end{pmatrix}$$

이때 $p+q$ 의 값은?

[3점]

- ① 35 ② 36 ③ 37
 ④ 38 ⑤ 39

12. 집합 $A = \{(x, y) | y = \log_2(x+1)\}$ 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[3점]

<보 기>

- ㄱ. $(17, 4) \in A$
 ㄴ. $(2^a - 1, a) \in A$
 ㄷ. $(a, b) \in A, (c, d) \in A$ 이면 $(ac + a + c, b + d) \in A$ 이다.

- ① ㄴ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. 두 분수부등식

$$\frac{x^2+4x}{x^2-9x} \leq 0, \frac{x-3}{|x|-3} \leq 2$$

를 모두 만족시키는 정수 x 의 값의 개수는?

[4점]

- ① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

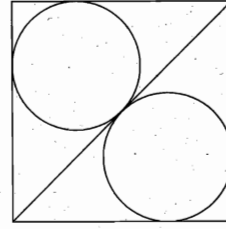
14. 좌표평면 위에서 점 $P_1(1, 0)$ 에 대하여 두 점 $P_n, Q_n (n=1, 2, 3, \dots)$ 을 다음 규칙에 따라 정하자.

- (가) 점 P_n 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동시킨 점을 Q_n 이라 한다.
(나) 점 Q_n 을 x 축의 방향으로 $n+1$ 만큼 평행이동시킨 점을 P_{n+1} 이라 한다.

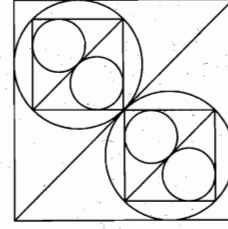
두 점 P_n, Q_n 의 x 좌표를 각각 a_n, b_n 이라 할 때, $a_{25}+b_{26}$ 의 값은? [4점]

- ① 169 ② 200 ③ 262
④ 300 ⑤ 338

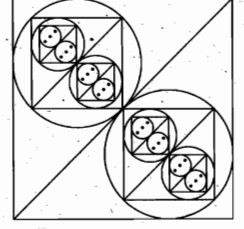
15. [그림 1]과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형의 두 변과 한 대각선에 모두 접하는 원을 2개 그린다. [그림 2]와 같이 [그림 1]에서 그린 각 원에 내접하는 정사각형을 각각 그리고, 각 정사각형의 두 변과 한 대각선에 모두 접하는 원을 각각 2개씩 그린다. 이와 같이 [그림 n]에서 그린 각 원에 내접하는 정사각형을 각각 그리고, 각 정사각형의 두 변과 한 대각선에 모두 접하는 원을 각각 2개씩 그린다.



[그림 1]



[그림 2]

[그림 n]

이와 같은 과정을 한없이 반복할 때, [그림 n]에서 새로 그려진 원의 둘레의 길이의 총합을 $l_n (n=1, 2, 3, \dots)$ 이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ 의 값은? [4점]

- ① $2(2-\sqrt{2})\pi$ ② π ③ 2π
④ $2\sqrt{2}\pi$ ⑤ $2(2+\sqrt{2})\pi$

16. 수직선 위를 움직이는 점 P 가 있다. 점 P 가 출발한 지 t 초 후의 위치 $x(t)$ 가

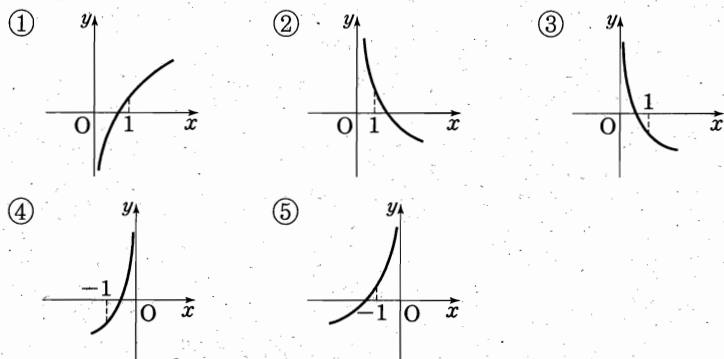
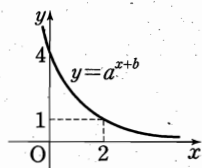
$$x(t) = \frac{t^3+5}{t+1}$$

로 나타내어진다. 점 P 가 출발한 후 처음으로 정지하는 순간의 위치는? [4점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

17. 함수 $y=a^{x+b}$ ($a>0, a\neq 1$)의 그래프가 그림과 같이 두 점 $(0, 4), (2, 1)$ 을 지날 때, 다음 중 함수 $y=\log_a bx$ 의 그래프는? (단, a, b 는 상수이다.)

[3점]



18. 수열 $\{S_n\}$ 의 일반항이

$$S_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n+1} n^2 \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad \text{..... ㉠}$$

일 때, 다음은 2 이상의 모든 자연수 n 에 대하여 등식

$$S_n = -S_{n-1} + (-1)^{n+1} n \quad \text{..... ㉡}$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

(i) $n=2$ 일 때 ㉠에서 $S_2 = 1^2 - 2^2 = -3$ 이고

㉡에서 $S_2 = -S_1 - 2 = -1 - 2 = -3$ 이므로 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 2$)일 때, ㉡이 성립한다고 가정하자.

$n=k+1$ 일 때,

$$S_{k+1} = S_k + (-1)^{k+2} \cdot \boxed{(\text{가})}$$

$$= -S_{k-1} + (-1)^{k+1} k + (-1)^{k+2} \cdot \boxed{(\text{가})}$$

$$= -\{S_{k-1} + (-1)^{k+1} k^2\} + (-1)^{k+1} \{ \boxed{(\text{나})} - \boxed{(\text{가})} \}$$

$$= -S_k - (-1)^{k+1} (k+1)$$

$$= -S_k + (-1)^{k+2} (k+1)$$

이므로 ㉡은 $n=k+1$ 일 때에도 성립한다.

따라서, (i), (ii)에서 ㉡은 2 이상의 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

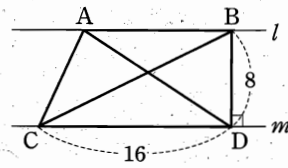
위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k), g(k)$ 라 할 때, $f(2)+g(2)$ 의 값은?

[4점]

- ① 13 ② 15 ③ 17
④ 19 ⑤ 21

19. 그림과 같이 평행한 두 직선 l, m 이 있다. 직선 l 위의 두 점 A, B와 직선 m 위의 한 점 C가 있다. 점 B에서 직선 m 에 내린 수선의 발을 D라 하자. $\overline{BD}=8$, $\overline{CD}=16$ 이고, $\angle ACB = \angle BCD$ 가 성립할 때, 선분 AC의 길이는?

[3점]

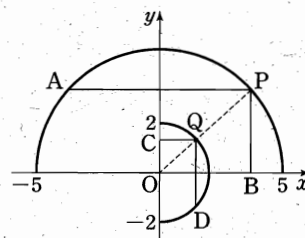


- ① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

20. 그림과 같이 원점 O가 중심이고, 반지름의 길이가 각각 5, 2인 두 반원이 있다. 큰 반원 위의 점 P에 대하여 선분 OP가 작은 반원과 만나는 점을 Q라 하자. 점 P에서 x 축, y 축에 평행한 직선을 그어 큰 반원과 만나는 점을 A, x 축과 만나는 점을 B라 하고, 점 Q에서 x 축, y 축에 평행한 직선을 그어 작은 반원과 만나는 점을 D, y 축과 만나는 점을 C라 하자.

$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{QC} + \overline{QD}$ 의 최댓값은? (단, 점 P는 제 1사분면의 점이다.)

[3점]



- ① 15 ② 16 ③ 17
④ 18 ⑤ 19

21. 곡선 $y=x+\frac{a}{x}$ ($x>0$, a 는 양의 상수) 위의 점 중에서 원점 O에서 가장 가까운 점을 P라 할 때, 점 P에서의 접선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[4점]

<보 기>

ㄱ. $\overline{OP}=1$ 이면 $a=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ 이다.ㄴ. a 의 값에 관계없이 직선 AB의 기울기는 일정하다.ㄷ. a 의 값에 관계없이 직선 OP와 직선 AB는 수직이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

22. 수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_1=2, a_{n+1}-a_n=5(n=1, 2, 3, \dots)$$

와 같이 정의될 때, a_{20} 의 값을 구하시오.

[3점]

23. 함수 $y=-3^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동시킨 후, x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -5만큼 평행이동시켰더니 함수 $y=a \cdot 3^{-x}+b$ 의 그래프와 일치하였다. 이때 두 상수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하시오.

[3점]

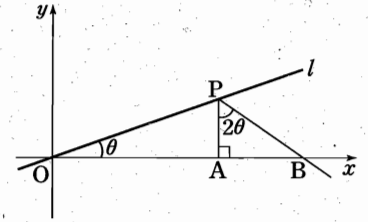
24. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2n+1} - 5 \right) = 2013$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100a_n}{a_n - 5n}$ 의 값을 구하시오. [3점]

25. 미분 가능하고 일대일대응인 함수 $f(x)$ 와 그 역함수 $g(x)$ 에 대하여 다음 두 조건이 성립한다.

$$\begin{aligned} \text{㉠) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-1}{x-3} &= a \\ \text{㉡) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{g(x)-b} &= 5 \end{aligned}$$

이때 두 상수 a, b 에 대하여 $a \times f'(b)$ 의 값을 구하시오. [4점]

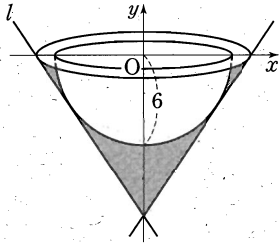
26. 그림과 같이 원점 O 를 지나는 직선 l 위의 한 점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 A 라 하자. $\frac{PA}{OP} = \frac{1}{3}$, $\angle POA = \theta$ 일 때, 점 P 에서 선분 PA 와 이루는 각이 2θ 가 되도록 직



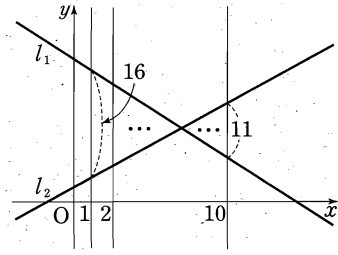
선을 그어 x 축과 만나는 점을 B 라 하자. $\frac{AB}{OA} = \frac{q}{p}$ (p, q 는 서로소인 자연수)일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, 점 B 의 x 좌표는 점 A 의 x 좌표보다 크다.) [4점]

27. 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항이 $a_n = (x-2)(x-3)^n$ ($n=1, 2, \dots$)일 때, 수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하기 위한 모든 정수 x 의 값의 합을 p , 수열 $\left\{ \sum_{k=1}^n a_k \right\}$ 가 수렴하기 위한 모든 정수 x 의 값의 합을 q 라 하자. $p+q$ 의 값을 구하시오. [4점]

28. 그림과 같이 곡선 $y = -\sqrt{36-x^2}$ 에 접하는 직선 l 이 있다. 이때 이 곡선과 x 축, y 축 및 접선 l 로 둘러싸인 부분을 y 축의 둘레로 회전시켜 만들어지는 입체도형(어두운 부분)의 부피의 최솟값은 $(p\sqrt{3}-q)\pi$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 유리수이다.) [4점]



30. 그림과 같이 좌표평면에서 직선 $x=n$ ($n=1, 2, 3, \dots, 10$)이 두 직선 l_1, l_2 에 의해 잘려서 생기는 선분의 길이를 a_n 이라 하자.



- $a_1=16, a_{10}=11$ 일 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값을 구하시오. (단, 두 직선 l_1, l_2 의 교점의 x 좌표는 1보다 크고 10보다 작다.) [4점]

29. 등환이와 산영이는 등산 도중 같은 지점에서 함께 부상을 당하여 부상당한 지점으로부터 등산로를 따라 6km 떨어진 구조대에 전화를 걸고 난 후 곧바로 구조대를 향하여 각자 같은 길로 하산을 하였다. 등환이는 매시 1.5km의 일정한 속력으로, 산영이는 매시 2km의 일정한 속력으로 하산하였을 때, 구조대는 산영이를 먼저 만나고 나서 계속 올라갔더니 10분 후에 등환이를 만났다. 등환이와 산영이가 하산한 길과 구조대가 올라간 길은 같은 등산로이며, 구조대가 올라가는 속력은 매시 x km로 일정할 때, $10x$ 의 값을 구하시오. (단, 구조대는 전화 받은 즉시 출발하였다.) [4점]

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.